第 6 节 隐圆问题（★★★）

内容提要

本节归纳高考中几类常见的隐圆问题：

1．定长对定点：平面上到定点 $C(a,b)$ 的距离等于定长 r 的点 P 的轨迹是圆，如图 1.

2．定长对定角：

①平面上过两定点 A 和 B 的直线 l_1，l_2 互相垂直，则它们交点 P 的轨迹为圆，如图 2.

②平面上与两定点 A 和 B 所成视角为固定锐角或钝角的点的轨迹为一段圆弧，如图 3.

3．定长对定比（阿氏圆）：设 A 和 B 是平面内两定点，若点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|}=\lambda(\lambda>0$ 且 $\lambda\neq1)$，则点 P 的轨迹是圆，该圆被称为阿氏圆，如图 4.

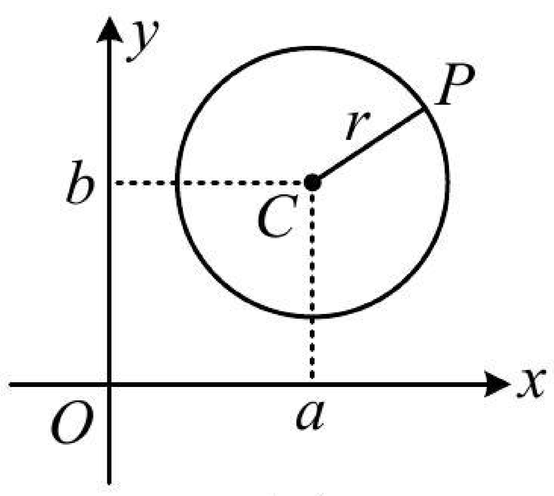


图1

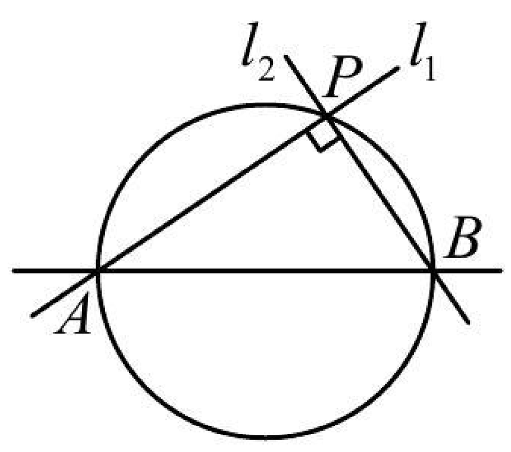


图2

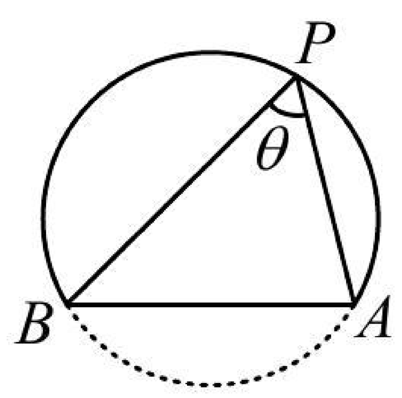


图3

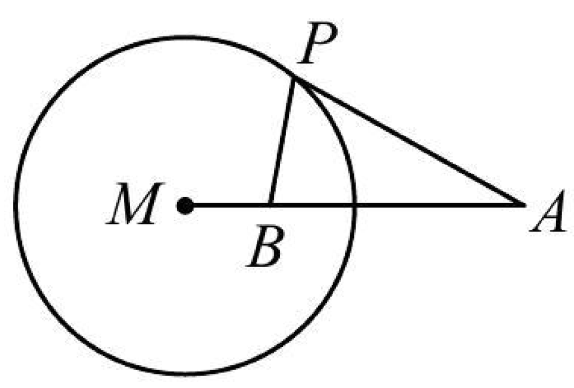


图4

典型例题

类型Ⅰ：定长对定点

【例 1】如果圆 $C:(x-a)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两个点到原点 O 的距离为 2，则正实数 a 的取值范围是_____.

解析： 到原点的距离为 2 的点在圆 $O:x^2+y^2=4$ 上，故问题等价于圆 C 和圆 O 有两个交点，

由题意，圆 C 的圆心为 $C(a,1)$，半径 $r_1=1$，圆 O 的半径 $r_2=2$，所以 $|OC|=\sqrt{a^2+1}$，

两圆相交 $\Rightarrow|r_1-r_2|<|OC|<r_1+r_2\Rightarrow1<\sqrt{a^2+1}<3$，结合 $a>0$ 可解得：$0<a<2\sqrt{2}$.

答案： $(0,2\sqrt{2})$

【例 2】过圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$ 外一点 P 作圆 C 的两条切线 PA，PB，切点分别为 A 和 B，若 $PA\perp PB$，则点 P 到直线 $l:x+y-4=0$ 的距离的最小值为_____.

解析： 先分析点 P 的运动轨迹，$\angle APB$ 的大小由 $|PC|$ 决定，故可由 $PA\perp PB$ 求得 $|PC|$，

如图，$PA\perp PB\Rightarrow\angle APC=45^\circ\Rightarrow\Delta PAC$ 是等腰直角三角形，所以 $|PC|=\sqrt{2}|AC|=\sqrt{2}$，

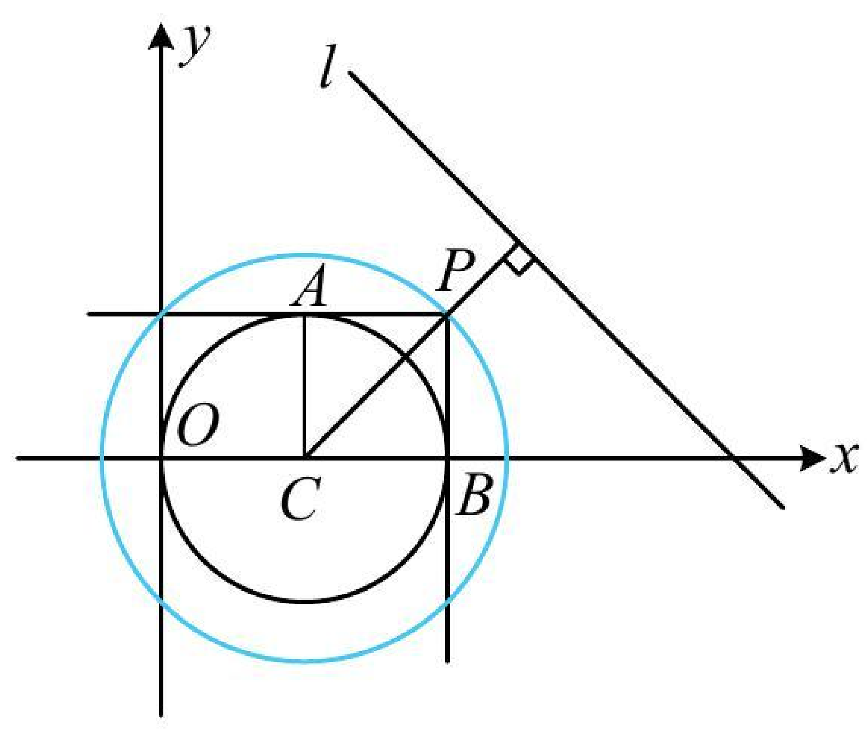
注意到 C 是定点，所以点 P 的轨迹是以 $C(1,0)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆，如图，

接下来就是圆上动点到定直线距离的最值问题了，先求圆心 C 到直线 l 的距离 d，

$d=\dfrac{|1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$，直线 l 与点 P 所在的圆相离，图中点 P 即为所求距离最小的情形，

所以点 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



【反思】从上面两道题可以看出，动点 P 与定点 C 之间的距离为定值这种条件隐含了点 P 的轨迹是圆，在诸多问题中，发现这一特征，往往是解题的关键.

类型Ⅱ：定长对定角

【例 3】已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$C(4,3)$，动点 P 满足 $PA \perp PB$，则 $|PC|$ 的取值范围是（　　）

（A）$[2,5]$　　（B）$[2,8]$　　（C）$[3,7]$　　（D）$[4,6]$

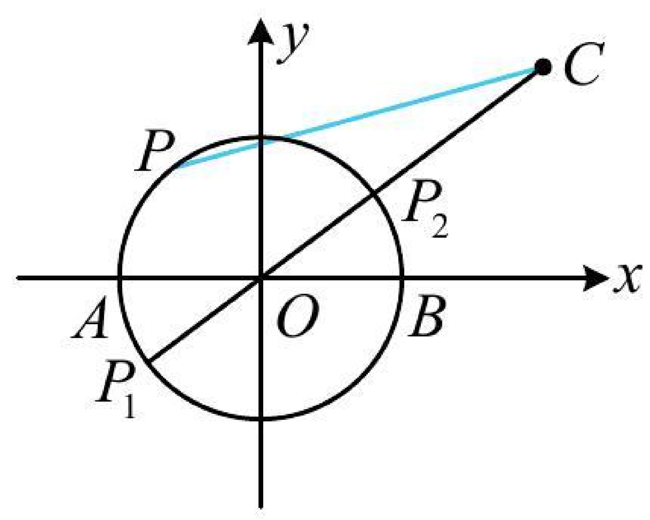
解析： A，B 是定点，由 $PA \perp PB$ 可知点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆，先求出该圆，

由题意，点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上（不含 A，B 两点），

如图，点 C 在圆外，$|PC|$ 的最大值、最小值分别在 P_1，P_2 处取得，

因为 $|OC|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，所以 $|PC|_{\max}=|OC|+|OP_1|=7$，$|PC|_{\min}=|OC|-|OP_2|=3$.

答案： C



【变式】已知点 $A(a,0)$，$B(-a,0)$，其中 $a>0$，若圆 $C:(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ 上存在点 P，使 $\angle APB=90^{\circ}$，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$(0,4)$　　（B）$(0,4]$　　（C）$[2,3]$　　（D）$[1,2]$

解析： $\angle APB=90^{\circ}$ 隐含了点 P 的轨迹是圆，先把该圆找到，

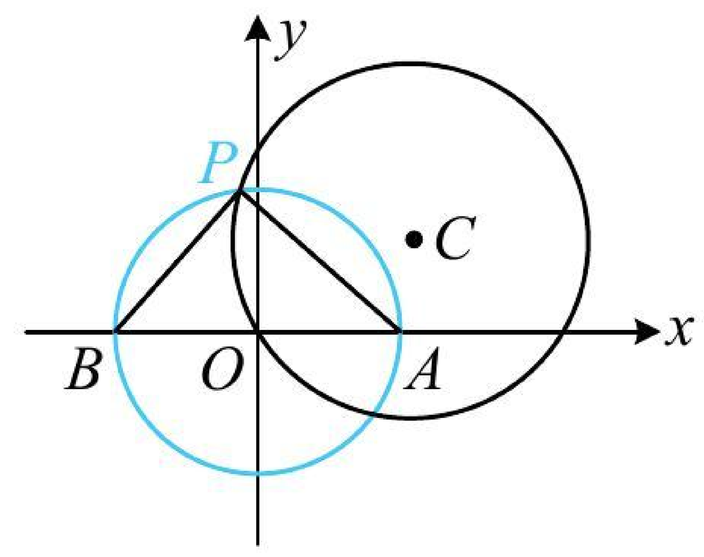
因为 $\angle APB=90^{\circ}$，所以点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆的圆心为原点 O，半径 $r_1=a$，

点 P 也在圆 C 上，于是两圆应有交点，如图，可根据圆与圆的位置关系来求 a 的范围，

由题意，圆 C 的圆心为 $C(\sqrt{3},1)$，半径 $r_2=2$，所以 $|OC|=2$，

两圆有交点 $\Rightarrow |r_1-r_2| \le |OC| \le r_1+r_2$，所以 $|a-2| \le 2 \le a+2$，结合 $a>0$ 解得：$0<a\le 4$.

答案： B



【反思】从例 3 和变式可以看出，涉及过两定点的两动直线互相垂直时，它们的交点的轨迹是圆.

类型Ⅲ：定长对定比（阿氏圆）

【例 4】若点 C 到 $A(-1,0)$，$B(1,0)$ 的距离之比为 $\sqrt{3}$，则点 C 到直线 $l: x-2y+3=0$ 的距离的最小值为_____.

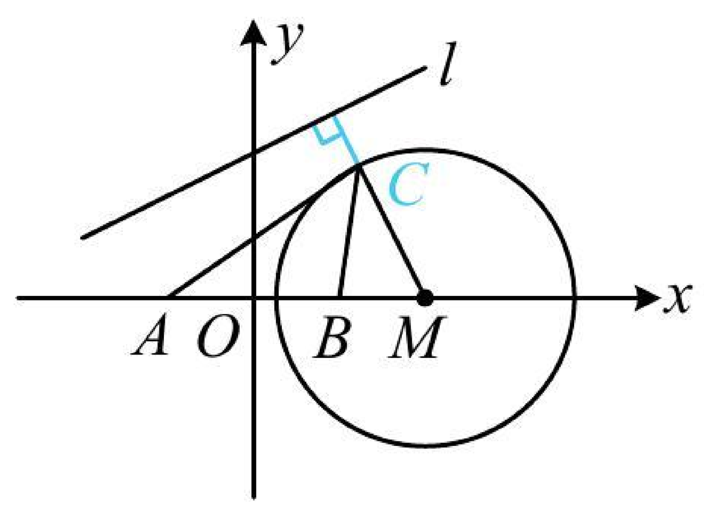
解析：要求目标，需找 C 的轨迹，可设 C 的坐标，利用两点距离公式翻译距离之比的条件，

设 $C(x,y)$，则由 $\dfrac{|CA|}{|CB|}=\sqrt{3}$ 可得 $\dfrac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\sqrt{3}$，整理得：$(x-2)^2+y^2=3$，

所以点 C 在圆心为 $M(2,0)$，半径 $r=\sqrt{3}$ 的圆上，圆心 M 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}>\sqrt{3}$，

直线 l 与圆 M 相离，图中的点 C 即为到 l 距离最小的情形，故所求距离的最小值为 $d-r=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$



强化训练

1．（2014·北京卷·★★★）已知圆$C:(x-3)^2+(y-4)^2=1$和两点$A(-m,0)$，$B(m,0)(m>0)$，若圆 C 上存在点 P，使得$\angle APB=90^{\circ}$，则 m 的最大值为（　　）

（A）7　（B）6　（C）5　（D）4

2．（★★★）若圆$C:x^2+y^2-6x-6y-m=0$上有到点$P(-1,0)$的距离为 1 的点，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[-18,6]$　（B）$[-2,6]$　（C）$[-2,18]$　（D）$[4,18]$

3．（2022·陕西模拟·★★★）阿波罗尼斯（约公元前 262~190 年）证明过这样一个命题：在平面内到两定点的距离之比等于常数$k(k>0$且$k\neq 1)$的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿氏圆. 若平面内两定点 A 和 B 之间的距离为 2，动点 P 满足$\dfrac{|PA|}{|PB|}=\sqrt{2}$，则 ΔPAB 的面积的最大值是（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）2　（C）$2\sqrt{2}$　（D）4

4．（★★★）已知圆$O:x^2+y^2=1$，圆$M:(x-a)^2+(y-a+4)^2=1$，若圆 M 上存在点 P，过点 P 作圆 O 的两条切线，切点为 A，B，且$\angle APB=60^\circ$，则 a 的取值范围为_____.

5．（2022·河南模拟·★★★★）已知点$M(0,-a)$，$N(0,a)$，$a>0$，若圆$C:(x-3)^2+(y+4)^2=9$上存在点 P 使得$\angle MPN$为钝角，则 a 的取值范围是_____.